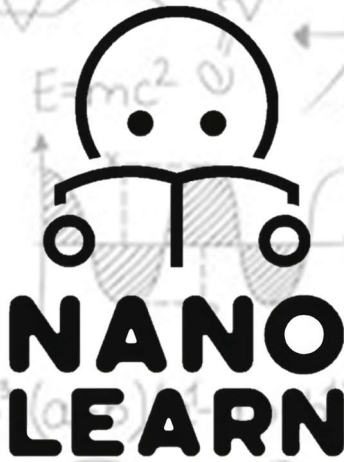


# دیفرانسیل

## به زبون آدمیزاد

1

هر فیلی رو میشه قاشق قاشق خورد



برای دانلود جدیدترین نسخه این جزوه، روی نماد تلوگرام کلیک کن

مهندس مجتبی احمدی

# دیفرانسیل چیه دقیقا؟!

ببین اگه تو یه معادله مشتق دیدی، اون معادله دیفرانسیل هستش!

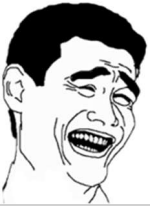
مثلا  $Y = X^2 + 2$  معادله هست اما دیفرانسیل نیست ❌

مثلا  $Y^3 - X = 3$  آفرین، اینم معادله دیفرانسیل نیست ❌

مثلا  $Y' + X = 3$  دقیقا، این معادله دیفرانسیل هستش ✅

مثلا  $Y'' = 7X - 4$  اینم یه معادله دیفرانسیل هستش چون توش مشتق داره ✅

مثلا  $Y' = 4$  اینم معادله دیفرانسیل هستش ✅



وقتی کسی داره دیفرانسیل میخونه،

لطفا از خواب بیدارش نکتید

## تو معادله دیفرانسیل دقیقا دنبال چی میگردیم؟

دنبال یه تابعی مثل  $Y$  میگردیم که داخل معادله جور در بیاد. (صدق کنه) مثال آخری بالا رو نگاه کن، دنبال تابعی میگردیم که اگه ازش مشتق بگیریم بشه 4 🙌

حالا خودت هم میتونی حدس بزنی که اگه جاش  $Y = 4X$  بزاری درست میشه، چون اگه ازش مشتق بگیری میشه 4، پس معادله رو حل کردیم، جوابش میشه تابع  $Y = 4X$ ، تبریک میگم همین الان یه معادله دیفرانسیل حل کردی 😊😊

اما همیشه به این آسونیا نیست، مثال چهارم بالا رو دوباره ببین، میتونی بگی جوابش چه تابعی هستش؟ زرشک 😬 به خاطر همین اینجا قراره روش هایی یاد بگیری که به جای حدس زدن، میتونی سریع به جواب برسی...

اینم بدونی بد نیست: به بیشترین مرتبه مشتقی که داخل معادله هست، میگیمرتبه معادله دیفرانسیل

مثلا  $Y'' + 2X = 4$  مرتبه 2 |  $X^2 - 2Y' = 0$  مرتبه یک

مثلا  $XY'' + Y' = 2$  مرتبه 2 (درسته که مشتق اول داره ولی بیشترینش مشتق دومه)

مثلا  $X^4 + Y' + 3Y^5 + 2Y^{(3)} - 3 = 0$  (مرتبه 3؛ دقت کن ما با توان کاری نداریم، با  $X$  هم کاری نداریم، فقط بیشترین مرتبه مشتق تابع  $Y$  که در واقع خودش تابعی از  $X$  هستش)

اینم بدونی بد نیست: وقتی تو توان پراتنز دیدی اون دیگه توان نیست، اون مرتبه مشتق هستش مثل همین مثال قبلی

این یکی بدونی بد نیست: میتونیم هم مشتق داشته باشیم و هم توان؛ ولی یادت باشه رفیق، بیشترین توان بالاترین مرتبه، درجه رو میده 😊

مثلا  $Y'^3 + 2Y + X = 0$  معادله دیفرانسیل مرتبه یک و درجه سه (بالاترین مرتبه مشتق یک هستش و توانش 3 هستش)

مثلا  $Y^{(3)} + 2Y''^4 + X = 0$  معادله دیفرانسیل مرتبه سه و درجه دو (بالاترین مرتبه مشتق سه هستش و توانش 2 هستش)

## دو نوع معادله دیفرانسیل وجود داره: خطی و غیرخطی

ما فقط رو خطی هاشون کراش میزنیم 😊 ، ببخشید فقط با خطی ها کار داریم. چون حل کردن غیرخطی ها کار حضرت فیله خداوکیلی و تو درس های دانشگاه نیست 😊

حالا خطی یعنی چی؟! دو تا شرط داره که اگه رعایت بشه، اون معادله میشه خطی، همین 😊

اولیش) تابعی که دنبالش میگردیم (همون  $Y$ ) نباید تو خودش و مشتق هاش ضرب شده باشه (پس اگه توان داشته باشه خطی نیست) دومیش) تابعی که دنبالش میگردیم (همون  $Y$ ) خودش و مشتق هاش، متغیر هیچ تابعی نباشن.

**آخی گوگولی، میدونم گیج شدی 😊** پس یه زحمتی بکش، مثال های پایین رو ببین ...

مثلا)  $X = \sin(Y) + Y'$  غیرخطیه، چون  $Y$  متغیر تابع سینوس شده

مثلا)  $Y^2 + Y'' = 3$  غیرخطیه، چون تابعی که دنبالشیم توان داره (یعنی تو خودش ضرب شده دیگه رفیق)

مثلا)  $X^2 + Y' = 3$  خطیه، چون  $Y$  نه توان داره نه متغیر تابع دیگه ایه

مثلا)  $Y'' + 6Y' + \sin(x) = 0$  خطیه، به دلیل بالایی 🙌

## یه معادله دیفرانسیل دو جور جواب داره : عمومی و خصوصی

حالا جواب عمومی چی چیه!؟

بیا یه مثال ساده بزنینم، به نظرت تو معادله  $X$ ،  $Y' = 2$  تابع  $Y$  چی میتونه باشه؟

آفرین میتونه  $X^2$  باشه، چون ازش مشتق بگیریم میشه  $X^2$

اما به نظرت  $X^2 + 3$  هم درست نیست؟ چون مشتق اش مثل بالایی درمیاد دیگه، دقیقا اینم میتونه جواب باشه، خب حالا  $X^2 + 999$  چطور؟ بازم درسته چون مشتقش میشه  $X^2$

پس دیدی چقدر جواب های مختلف داره، یه جورایی هر عددی بزاری، چون **مشتق عدد صفره** پس جواب درستش پس کلا میگیریم جوابش همیشه  $Y = X^2 + C$  که هر عددی میتونه باشه\*

به این میگن جواب عمومی چون بدونه نیست حالا اگه بهش عدد بدی مثلا بشه دقیقا  $X^2 + 4$  ، به این میگن جواب خصوصی چون مثل خودت 😊 فقط بدونه است شیطون بلا!

**نتیجه گیری :** از جواب عمومی میتونی بینهایت جواب خصوصی در بیاری که بعدا تو مثال ها بیشتر برات میگم فعلا عجله نکن.

ببین  $Y$  تابعی هستش که دنبالشیم، تو میتونی جاش  $f$  یا هر حرف دیگه ای بزاری، مهم مفهومشه  $Y = f(x)$

## چجوری معادلات مرتبه اول رو حل کنیم!؟

میدونی دیگه مشتق رو به شکل  $Y'$  یا  $\frac{dY}{dx}$  نشون میدن.

باید اینو بدونی که چون انتگرال، برعکس مشتق هستش پس  $\int \frac{dY}{dx}$  (انتگرال مشتق) میشه همون  $Y$  که تو حل همه معادلات مرتبه اول کمکت میکنه.



### معادلات جداشدنی

تو اینجور معادله ها، همه X ها و dx رو میبریم به طرف، همه y ها و dy رو هم میبریم به طرف...

بعدش از دو طرف انتگرال میگیریم؛ کار تمومه، تا اینجا جواب عمومی رو به دست آوردی. حالا مقداری که خودش داده رو قرار میدی تا جواب خصوصی رو هم گیر بیاری. اول مثال رو ببین بعد برگرد دوباره اینجارو بخون 😊

مثلا) معادله دیفرانسیل  $\frac{dy}{dx} = \frac{3x^2+2x}{2y}$  رو با شرط  $y(0) = 1$  حل کن.

حل) اول مرتب سازی با طرفین وسطین ➡  $2y dy = (3x^2 + 2x)dx$

حالا چون هر دو طرف dx و dy داری، میتونی انتگرال بگیر ➡  $\int 2y dy = \int (3x^2 + 2x)dx$

جواب هاشون میشه ➡  $y^2 = x^3 + x^2 + c$  یادت باشه بعد انتگرال گیری از دو طرف، همیشه سمت X به C میمونه (یعنی بنویس) که اگه جواب خصوصی میخوای باید شرط سوال رو اجرا کنی، یعنی  $y(0) = 1$

پس  $C = 1$  میشه ➡  $(1)^2 = (0)^3 + (0)^2 + c$  که همیشه  $C = 1$

تا اینجا به چی رسیدیم:  $y^2 = x^3 + x^2 + 1$  خب مگه دنبال تابع Y نبودیم؟ پس از دو طرف به رادیکال هم میگیریم تا Y رو به دست بیاریم.

پس آخر داستان شد این (چون C رو هم گیر آوردیم یعنی جواب خصوصی همیشه):  $y = \sqrt{x^3 + x^2 + 1}$

خب حالا اگه تو سوال نگفت این چه معادله ای هستش، از کجا بدونم باید به این روش حل کنم؟ از آب خوردن ساده تره رفیق، چک کن ببین همیشه همه X و dx ها برن به طرف و y ها و dy ها هم به طرف دیگه، اگه شد به روش بالا حلش کن و y رو گیر بیار. تمام تمام... 😊

جون کراشت به دور برگرد خودت این مثالو حل کن، تورو خدا 😊

### معادلات خطی (مرتبه اول)

فرم کلی شون این شکلیه :  $y' + p(x)y = q(x)$

در واقع  $p$  و  $q$  تابع هایی از  $x$  اند که میتونن عدد هم باشن.

مثلا  $y' + 2xy = 3x$  قیافه سوال داد میزنه معادله خطی مرتبه اوله 😊

حل) اول اینو به دست میاری  $A = e^{\int p(x) dx}$  (عدد نپر به توان انتگرال ضریب خود  $y$  که همون  $p(x)$  هستش).

اینو تو کل معادله ضرب میکنی، اینجوری  $Ay' + Ap(x)y = Aq(x)$

حالا طرف چپ رو مبیندی، یعنی به شکل مشتق یه چیزی مینویسیش، اینجوری  $\frac{d(Ay)}{dx}$  که اگه از مشتق بگیری میشه همون بالایی..

دو طرف رو در  $dx$  ضرب میکنی (که  $dx$  تو چپیه از بین بره) و از طرف راست انتگرال میگیری. اول شاخ مثال پایینو بشکنیم، بعد متن بالا رو دوباره بخون...

مثلا) برو تو نخ این سوال  $y' + y = 0$

حل) اول  $A$  رو حساب میکنی،  $A = e^{\int 1 dx} = e^x$ ، خب حالا تو معادله ضربش میکنیم.

اینجوری  $e^x y' + e^x y = 0$  🐣

حالا طرف چپ رو مبیندیم :  $\frac{d(e^x y)}{dx} = 0$

حالا دو طرف رو در  $dx$  ضرب میکنیم و انتگرال میگیریم (سمت چپ، انتگرالش با  $d$  که همون مشتقه، خنثی میشه پس خودش رو

مینویسیم)  $e^x y = \int 0 dx$

جواب انتگرال رو میگیری (میشه  $C$ ) و  $y$  رو تنها میکنی و تمام! یعنی اینجوری میشه :  $y = \frac{c}{e^x} = ce^{-x}$

یادآوری : ما تابعی رو به دست آوردیم که تو معادله اصلی که خود سوال داده بود صدق میکنه، اگه شک داری بزار توش خودت ببین...

کمک میخوای؟ اگه در انتگرال گیری مشکل داری، جزوه [انتگرال به زبون آدمیزاد](#) رو قبلش از نانو لرن دانلود کن و بخون...

## معادلات همگن

تابع همگن چیه؟ اگه بتونی جای متغیر های  $x$  و  $y$  یه تابع  $t_x$  و  $t_y$  بزاری و  $t$  و خود تابع اصلی رو سالم بکشی بیرون، اون

تابع همگن هستش. (مرتبه همگن بودنش هم توان  $t$  هستش)

مثلاً) تابع  $x^2 + xy$  همگنه، چونکه  $(tx)^2 + (tx)(ty) = t^2(x^2 + xy)$  پس خود تابع و t تفکیک شدند و سالم بیرون اومدند و چون t توان دو داره، همگن مرتبه دو هستش.

معمولا اول تابع رو این شکلی بهت میدن  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  حالا هر دوتا تابع M و N رو چک میکنی، اگه جفت شون همگن (و هم مرتبه) بودند، با روش زیر حلش میکنی...

اول تغییر متغیر میدیم:  $z = \frac{y}{x}$  پس میشه گفت  $y = zx$  و  $\frac{dy}{dx} = y' = z'x + z$

اگه یادت نیاد مشتق ضرب میشه ➡ مشتق اولی در دومی + مشتق دومی در اولی

برای شروع، معادله رو به شکل  $\frac{dy}{dx} = -$  مینویسی و جایگذاری میکنی، فقط با X ها کاری نداشته باش، فقط y ها رو تغییر متغیر بزنی. در نهایت تمام Z و dz یه طرف و y و dy ها یه طرف و از دو طرف انتگرال میگیری. فقط آخرش Z رو برگردون به حالت اول.

خب جنتلمن، اول مثال زیر رو ببین بعد دوباره برگرد اینجا رو بخون...

مثلاً) جواب اینو اِخ کن  $(x + y)dx - (x)dy = 0$

حل) خب معلومه که این همگنه! چرا؟ خودت طبق چیزی که گفتم تستش کن. تغییر متغیر رو مینویسیم برای خودمون و برای شروع

کسریش میکنیم:  $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x} \rightarrow (x + y)dx = xdy$

خب گفتیم فقط y و مشتقش اش رو تغییر متغیر میدیم و به X دست نمیزیم جیزه! 😊 یعنی اینجوری:  $z'x + z = \frac{x+zx}{x}$

خب حالا سمت راست داره داد میزنه از X فاکتور بگیر و ساده کن:  $z'x + z = 1 + z \rightarrow$  یعنی  $\frac{x(1+z)}{x} \rightarrow 1 + z$

حالا Z رو ساده کن از دو طرف (بیشترش ساده کاری ساده ی ریاضیه):  $z'x = 1$  و از طرفی میدونیم که  $\frac{dz}{dx} = z'$

خب جایگذاری کن تا اینجا فعلا کارمون تموم بشه:  $\frac{dz}{dx} x = 1$  خب حالا باید چیکار کنیم؟ گفتیم که تمام Z و dz یه طرف و y و dy ها

یه طرف، اینجا شو فقط نگاه کن چیکار میکنم:  $x dx = dz \rightarrow \frac{1}{dx} x = \frac{1}{dz}$

چیشده؟ چیکار کردیم؟ دو طرف رو به dz تقسیم کردیم بعدش دو طرف رو برعکس کردیم (یعنی جای صورت و مخرج رو عوض کردیم)

خب دیگه از دو طرف انتگرال بگیر:  $\int x dx = \int dz \rightarrow \frac{x^2}{2} + c = z$

یادت میاد که سمت X ها همیشه یه C می مونه دیگه، گیر نده جیگر! 😊 فقط ما آخرش Z که نمیخواستیم، پس تغییرش بده به

همون اولی دیگه یعنی  $z = \frac{y}{x}$



ابواسحاق نمره دیفرانسیل ات را چه شد؟

کیان، شرایط استخدام استپ چیست؟

پس شد این :  $\frac{x^2}{2} + c = \frac{y}{x}$  اگه يادت باشه گفتيم جواب هميشه يه تابعي هستش که در معادله اصلي صدق کنه، معمولا اينجا استادت ميگه حله چشات 🤔 ولی اگه آدم رو مخي بود ميتوني خيلي شيك و مجلسي y رو تنها کني و بهش تحويل بدی، بگي بيا ما اينجا داريم زحمت ميکشيم 😊

$$y = \frac{x^3}{2} + cx$$



خب حاجي يه سوال : اگه يه وقت فهميديم معادله همگن نيست، اون وقت چي؟ خب شايد معادله کامل هستش.

## معادلات کامل

معادله  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$  رو يادته، اگه اين شرط رو داشته باشه، بهش ميگيم "کامل"

شرط کامل بودن :  $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$  يعني مشتق اوني که dx داره نسبت به y مساوي بشه با مشتق اوني که dy داره نسبت به x

اگه کامل بود (يعني مساوي بودن)، اينجوري حل ميکني: اول از M انتگرال ميگيري  $\int M dx = A + c$  که يه عبارتي ميشه با عدد ثابت

بعد از همون عبارت (يعني A+c) نسبت به y مشتق بگير و مساوي همون N قرارش بده، اينجوري  $\frac{d(A+c)}{dy} = N$  که يه عبارت داري و c' (چون مشتق گرفتي، ديگه خود c نيست)

اين قسمت آخر براي اينه که بتونيم C رو گير بياريم. سه سوت يه مثال حل ميکنيم و بعد بيا اينجا رو دوباره بخون 🙋

مثلا معادله  $e^y dx + (xe^y + 2y) dy = 0$  رو حل کن

حل) اول تست ميکنيم ببينيم کامله يا نه  $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$  که ميشه  $e^y = e^y$  يعني مساوي اند پس معادله کامل هستش

ديگه تابلوه اول از M نسبت به dx انتگرال ميگيريم  $\int M dx = \int e^y dx = xe^y + c$

حالا از همين نسبت به y مشتق ميگيريم و مساوي N قرار ميديم که c رو گير بياريم، اينجوري  $xe^y + c' = xe^y + 2y$

پس  $c' = 2y$  و خود c هم ميشه  $c = \int 2y dy = y^2$

خب ما جواب رو قبلا هم گير آورده بوديم ولی c' رو نداشتيم که پيدا کرديم، پس جواب شد :  $xe^y + y^2$

نکته جالب : حالا اگه معادله "کامل" هم نبود، ميتوني با يه قلقي کاملش کني، يه چيزي توش ضرب ميکنيم تا کامل بشه بعد

بتونيم مثل بالا حلش کنيم، به اين ميگيم عامل انتگرال ساز (هموني که قراره ضربش کني تو معادله تا کامل بشه)

يادآوری : اگه يادت بياد براي حل خطي ها هم يه چيزي توش ضرب ميکرديم، يادت مياد چي بود؟

عامل انتگرال ساز (کامل کردن معادلات غيرکامل)

خب از بالا به پایین به ترتیب هر کدوم کارت رو راه انداخت حله، اگه نه برو سراغ بعدیش... قراره سمت راست رو حساب کنی اگه بر حسب چیزی بود که گفته شده، سمت چپی همون عامل انتگرال سازت همیشه.  
دقت کن وقتی مثلا میگه فقط بر حسب X یعنی یا عدد بمونه یا X و بقیه هم همین طوری...

$$e^{\int \frac{M_y - N_x}{-M} dy}$$

اگه اینو حساب کردی و کاملا بر حسب y شد، سمت چپ رو حساب کن،

عامل انتگرال سازت همیشه! ➔

اونی که زیروند نوشته شده، یعنی مشتق بر اساس اون بگیر،

مثلا اولی میگه از M نسبت به y مشتق بگیر

$$\frac{M_y - N_x}{-M}$$

عدد تیر به توان انتگرال عبارت سمت راستی بر اساس dy

$$e^{\int \frac{M_y - N_x}{N} dx}$$

اگه بالایی کاملا بر حسب y نشد، اینو حساب و اگه این کاملا بر حسب X شد،

سمت چپ رو حساب کن، عامل انتگرال سازت همیشه! ➔

$$\frac{M_y - N_x}{N}$$

$$e^{\int \frac{M_y - N_x}{Ny - Mx} d(xy)}$$

اگه بالایی کاملا بر حسب y نشد، اینو حساب کن و اگه این کاملا بر حسب X

شد، سمت چپ رو حساب کن، عامل انتگرال سازت همیشه! ➔

$$\frac{M_y - N_x}{Ny - Mx}$$

دقت کن که انتگرال رو بر اساس xy میگیری!

بین اگه مخرج رو به M یا N تقسیم کردی ولی بر حسب یکی شون

شد، از این راه میری یعنی مخرج رو به  $(N \times Y) + (M \times X)$  تقسیم میکنی...

مثلا) اینو طعم کن :  $(3xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy = 0$

$$\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{-M} = \frac{3x+2y-2x-y}{3xy+y^2} = x + y \quad \text{حل) آیی خدایا!، از اولی بریم فقط بر حسب X همیشه که لعنتی } x + y$$



پس سه سوتته میریم سراغ دومی  $\frac{\frac{dM}{dy} - \frac{dN}{dx}}{N} = \frac{3x+2y-2x-y}{x^2+xy} = \frac{x+y}{x(x+y)} = \frac{1}{x}$  خب حله دیگه آخرش فقط بر حسب X شد، پس

عامل انتگرال سازمون اینه  $e^{\int \frac{1}{x} dx} = e^{\ln(x)} = x$  خب حالا همینو تو معادله اصلی ضرب کنی، تبدیل میشه به معادله

کامل که بتونی حلش کنی، معادله این شد  $(3x^2y + xy^2)dx + (x^3 + x^2y)dy = 0$

از کجا مطمئنی معادله کامل شد؟ کاری نداره که، شرط کامل شدن رو اجرا میکنیم  $\frac{dM}{dy} = 3x^2 + 2xy$  ,  $\frac{dN}{dx} = 3x^2 + 2xy$

دیدنی یکی شدن پس کامل شده، حالا اگه روش حل معادله کامل رو یادت نیست، برگرد بالا رو دوباره بخون و حلش کن.

مثلا) معادله مزخرف  $(y^3 + xy^2 + y)dx + (x^3 + x^2y + x)dy = 0$  رو حل کن.



حل) اگه از مورد اول و دوم بری بر حسب X و y خالی در نمیاد، پس از مورد سوم میریم (خودت حساب کن ببین چرا میگم همیشه)

$$\frac{\frac{dM}{dy} \frac{dN}{dx}}{Ny} = \frac{3y^2+2xy+1-3x^2-2xy-}{yx^3+x^2y^2+xy-x^3-x^2y^2-x} = \frac{3(y^2-x^2)}{yx^3-xy^3} = \frac{3(y^2-x^2)}{xy(x^2-y^2)} = \frac{-3(x^2-y^2)}{xy(x^2-y^2)} = -\frac{3}{xy}$$

$$e^{\int \left(\frac{-3}{xy}\right) d(xy)} = e^{-3(\ln xy)} = e^{\ln xy^{-3}} = (xy)^{-3} = \frac{1}{(xy)^3} = \frac{1}{x^3y^3}$$

اگه اینو تو معادله اصلیه ضرب کنیم، کامل میشه و میتونیم به روش کامل حلش کنیم که دست خودتو مپیوسه 🤔

$$\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^2y} + \frac{1}{x^3y^2}\right) dx + \left(\frac{1}{y^3} + \frac{1}{xy^2} + \frac{1}{x^2y^3}\right) dy = 0$$

به قیمت دلار قسم این سوالا خار نداره 😊، چون هر کی دوست داری، مرحله مرحله بخون تا قاطی نکنی، دیفرانسیل همینجوریش زیاده، برا خودت سختش نکن..

یه راه دیگه هم برای پیدا کردن عامل انتگرال ساز هست، این که فرض کنیم عامل انتگرال ساز  $x^m y^n$  باشه و تو معادله ضربش کنیم بعد شرط کامل بودن رو اجرا کنیم تا اون m و n مجهولش رو پیدا کنیم...

مثلا) این معادله دیفرانسیل دنبال نیمه گمشده اش میگرده، کسی که بتونه کاملش کنه تا بره خواستگاریش، حالا تو بگو چی اینو

$$(-xy + 2y^3)dx + (x^2 + xy^2)dy = 0$$

حل) خب عامل انتگرال ساز میتونه اینو به معادله کامل تبدیل کنه و فرض میکنیم که این باشه  $x^m y^n$ ، خب پس اگه تو معادله ضربش کنیم باید کامل بشه دیگه چون ما فرض کردیم مثلا این همون عامل باشه. پس بعد از اینکه تو معادله ضربش کردیم میتونیم شرط کامل بودن رو تست کنیم و از اونجایی که باید کامل باشه، از همو m و n مجهول رو گیر میاریم و تموم... بزنی بریم تو کارش...

$$(-3x^{m+1}y^{n+1} + 2x^m y^{n+3})dx + (x^{m+2} + y^n + x^{m+1}y^{n+2}) = 0$$

$$\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$$

$$(n+1)(-3x^{m+1}y^n) + (n+3)(2x^m y^{n+2}) = (m+2)(x^{m+1}y^n) + (m+1)(x^m y^{n+2})$$

👉 حالا ضرایب یکسان رو مساوی میزاریم، اینجوری

$$(-3n - 3)(x^{m+1}y^n) = (m + 2)(x^{m+1}y^n) \gg -3n - 3 = m + 2$$

$$2(n + 3)(x^m y^{n+2}) = (m + 1)(x^m y^{n+2}) \gg 2n + 6 = m + 1$$

$$x^m y^n = xy^{-2} = \frac{x}{y^2} \quad \text{اگه این دو معادله دو مجهول رو حل کنی } m = 1 \text{ و } n = -2 \text{ پس عامل انتگرال ساز همیشه این } \rightarrow$$

## معادلات برنولی

معادله خطی رو یادته؟ تهنش یه  $y^n$  اضافه کن همیشه برنولی  $y' + p(x)y = q(x)y^n$

فقط اگه  $n = 0, 1$  باشه، معادله مون خطی یا جدانشدنی میشه، پس  $n$  صفر و یک نیست. برای حلش این تغییر متغیر رو میگیری  $z = y^{1-n}$

تو تغییر متغیر  $y$  رو تنها میکنی بعد  $y'$  و  $y^n$  رو هم حساب میکنی میزاری تو معادله، میدونی بعدش چی میشه؟ تبدیل میشه به خطی، بعد راحت حلش میکنی...

مثلاً) یه نگاهی به این بنداز  $xy' + (1-x)y = x^2y^2$

حل) معادله رو استاندارد میکنیم (ضریب  $y'$  باید یک باشه)  $y' + \frac{1-x}{x}y = xy^2$

حالا تغییر متغیر  $z = y^{1-n} = y^{1-2} = y^{-1}$  پس  $y^2 = z^{-2}$  و  $y' = -z^{-2}z'$  و  $y = z^{-1}$  یعنی ما چیزایی که تو معادله نیاز داریم رو میسازیم.

حالا معادله رو دوباره میسازیم  $-z^{-2}z' + \left(\frac{1-x}{x}\right)z^{-1} = xz^{-2}$

بازم استاندارد میکنیم (ضریب  $Z'$  باید یک باشه دیگه)  $z' - \left(\frac{1-x}{x}\right)z = -x$  (در "منفی  $z$  به توان 2" ضرب کردیم)

تبدیل شد به معادله خطی که بقیه شو بلدی (خداوکیلی اگه معادله خطی بلد نیستی حل کنی دهننتو سرویس، برگرد برو همین الان مرور کن)...

## معادلات ریکاتی

بازم معادله خطی رو یادته با این تغییر همیشه ریکارتی  $y' + p(x)y = q(x)y^2 + r(x)$

فقط سید حواست باشه: تو برنولی  $y$  هر توانی داره ولی تو ریکارتی فقط توانش 2 هستش.

اگه توان  $y$  دو بود ریکاتی؟ نه خوشگلم حواست کجاست؟ یه  $r(x)$  اضافی هم داره که میتونه تابع یا عدد باشه

یادت باشه که همیشه بهت یه جواب خصوصی معادله رو میده، بعد با این تغییر متغیر میتونی حلش کنی (جواب خصوصی  $z = y +$ )

ترتیب حل اش اینجوریه: تغییر متغیر << تبدیل به برنولی << تبدیل به خطی << حل معادله خطی

مثلاً) این داداش مون رو  $y' = -x^5 + \frac{y}{x} + x^3y^2$  با جواب خصوصی  $y=x$  حلش کن.

حل) از رو قیافه که نمیفهمیم اول به فرم استاندارد مینویسیم:  $y' - \frac{y}{x} = x^3y^2 - x^5$

الان معلوم شد ریکاتی، تغییر متغیرهارو شروع میکنیم:  $y = z + x$  و  $y' = z' + 1$  و  $y^2 = (z + x)^2$  یعنی هرچی نیاز داشتیم رو ساختیم

حالا با این تغییرات بازسازی اش کنیم:  $z' + 1 + \left(-\frac{1}{x}\right)(z + x) = x^3(z + x)^2 - x^5$

خب بازش میکنیم و میریم برای ساده کاری:  $z' - \frac{z}{x} - 2x^4z = x^3z^2$  پس  $z' - \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)z = x^3z^2$

آخیش حالا این برنولی شد، برای حل برنولی  $u = z^{1-n} = z^{-1}$  پس همیشه گفت  $z = u^{-1}$

خب اوستا معادله رو دوباره یه نگاه بنداز، اینارو هم نیاز داریم بسازیم :  $z^2 = u^{-2}$  و  $z' = -1u^{-2}u'$

$$-u^{-2}u' - \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)u^{-1} = x^3u^{-2}$$

$$u' + \left(\frac{1}{x} + 2x^4\right)u = -x^3$$

آهان، الان دیگه شبیه چی شد؟ آفرین معادله خطی (قیافه معادله خطی اینجوری بود دیگه :  $y' + p(x)y = q(x)$ )

میدونم خسته شدی، واسه خودت یه نوشابه باز کن 😊 ؛ این الان خطی شده، حلش میکنی، فقط یادت باشه ما دنبال  $y$  بودیم پس وقتی  $u$

رو پیدا کردی تبدیلیش کن، یعنی  $u = z^{-1}$  و  $y = z + x$



## مرور فوری معادلات مرتبه اول :



### معادلات خطی

فرم کلی شون این شکلیه :  $y' + p(x)y = q(x)$

اول اینو به دست میاری  $A = e^{\int p(x) dx}$  (عدد نیر به توان انتگرال ضریب خود  $y$  که همون  $p(x)$  هستش.)

اینو تو کل معادله ضرب میکنی، اینجوری  $Ay' + Ap(x)y = Aq(x)$

حالا طرف چپ رو میندی، یعنی به شکل مشتق یه چیزی مینویسیش، اینجوری  $\frac{d(Ay)}{dx}$  که اگه ازش مشتق بگیری میشه همون بالایی...

دو طرف رو در  $dx$  ضرب میکنی (که  $dx$  تو چپیه از بین بره) و از طرف راست انتگرال میگیری

### معادلات کامل

معادله این شکلیه  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$

شرط کامل بودن :  $\frac{dM}{dy} = \frac{dN}{dx}$  یعنی مشتق اون که  $dx$  داره نسبت به  $y$  مساوی بشه با مشتق اون که  $dy$  داره نسبت به  $x$

اینجوری حل میکنی: اول از  $M$  انتگرال میگیری  $\int M dx = A + c$  که یه عبارتی میشه با عدد ثابت

بعد از همون عبارت (یعنی  $A+c$ ) نسبت به  $y$  مشتق بگیر و مساوی همون  $N$  قرارش بده، اینجوری  $\frac{d(A+c)}{dy} = N$  که یه عبارت داری و  $C'$  (چون مشتق گرفتی، دیگه  $C$  نیست)

این قسمت آخر برای اینه که بتونیم  $C$  رو گیر بیاریم.

### معادلات ریکاتی

قیافه اش اینجوریه  $y' + p(x)y = q(x)y^2 + r(x)$  🍌

بهت یه جواب خصوصی معادله رو میده، بعد با این تغییر متغیر میتونی حلش کنی 🍌 (جواب خصوصی  $z = y +$ )

ترتیب حل اش اینجوریه: تغییر متغیر << تبدیل به برنولی >> تبدیل به خطی << حل معادله خطی

### معادلات جداشدنی

تو اینجور معادله ها، همه  $x$  ها و  $dx$  رو میبریم به طرف، همه  $y$  ها و  $dy$  رو هم میبریم به طرف...

بعدش از دو طرف انتگرال میگیریم؛ کار تمومه، تا اینجا جواب عمومی رو به دست آوردی. حالا مقداری که خودش داده رو قرار میدی تا جواب خصوصی رو هم گیر بیاری.

### معادلات همگن

معمولا اول تابع رو این شکلی بهت میدن  $M(x, y) dx + N(x, y) dy = 0$

اول تغییر متغیر میسیم :  $z = \frac{y}{x}$  پس میشه گفت  $y = zx$  و  $\frac{dy}{dx} = z'x + z$

برای شروع، معادله رو به شکل  $\frac{dy}{dx} = -$  مینویسی و جایگذاری میکنی، فقط با  $x$  ها کاری نداشته باش، فقط  $y$  ها رو تغییر متغیر بزن.

در نهایت تمام  $z$  و  $dz$  به طرف  $y$  و  $dy$  ها به طرف  $x$  از دو طرف انتگرال میگیری. فقط آخرش  $z$  رو برگردون به حالت اول.

### معادلات برنولی

شکل کلیش اینجوریه  $y' + p(x)y = q(x)y^n$

فقط اگه  $n = 0, 1$  باشه، معادله مون خطی یا جداشدنی میشه، پس  $n$  منفی و یک نیست.

برای حلش این تغییر متغیر رو میگیری  $z = y^{1-n}$

تو تغییر متغیر  $y$  رو تنها میکنی بعد  $y'$  و  $y^n$  رو هم حساب میکنی میزاری تو معادله، بعدش تبدیل میشه به خطی، بعد راحت حلش میکنی...



# چجوری معادلات مرتبه دوم رو حل کنیم؟

👉 برای خوندن ادامه این جزوه روی این لینک لمس کن 👉

دیفرانسیل  
به زبون آدمیزاد

هر فیبا رو همیشه فاشی فاشی خورد  
 $a+b=(a+b)(a-ab+b)$

NANO LEARN  
NanoAmouz  
مهندس مکتبی احمدی

دیفرانسیل  
به زبون آدمیزاد

هر فیبا رو همیشه فاشی فاشی خورد  
 $a+b=(a+b)(a-ab+b)$

NANO LEARN  
NanoAmouz  
مهندس مکتبی احمدی

دیفرانسیل  
به زبون آدمیزاد

هر فیبا رو همیشه فاشی فاشی خورد  
 $a+b=(a+b)(a-ab+b)$

NANO LEARN  
NanoAmouz  
مهندس مکتبی احمدی